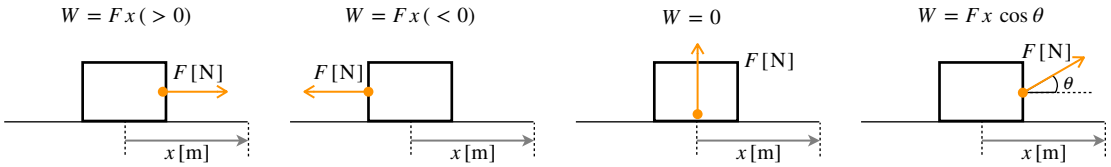
仕事と力学的エネルギー

I. 仕事と仕事率

POINT

◎「仕事W[J]」 ＝ 「移動方向成分の力[N]」 × 「移動距離[m]」

①力の向きと同じ方向に動く　②力の向きと逆の方向に動く　③力の向きと垂直方向に動く　④力の向きと角θ方向に動く



◎「仕事率P[W]」 ＝ 「仕事[J]」 ÷ 「時間[s]」　仕事率 … 1秒あたりにした仕事量

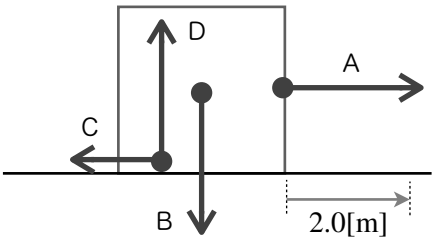
→ 仕事の効率を表している！

$$P[\mathrm{W}]=\frac{W[\mathrm{J}]}{t[\mathrm{s}]}=\frac{Fx}{t}\quad(=Fv)$$

例題 床の上にある物体にはたらく力A～Dが右図の4本の矢印で描かれている。

A：糸で物体を引く力　9.0[N]
B：物体にはたらく重力　8.0[N]
C：物体にはたらく動摩擦力　5.0[N]
D：物体にはたらく垂直抗力　8.0[N]

右図のように物体が右に2.0[m]移動したとき、
A～Dのそれぞれの力が物体にする仕事は何[J]か。

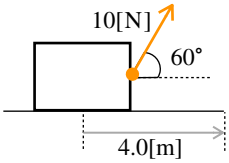


「仕事W[J]」 ＝ 「移動方向成分の力[N]」 × 「移動距離[m]」

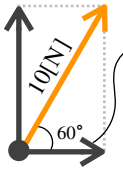
A：$W_A = F \times x = 9.0 \times 2.0 = \underline{18[\mathrm{J}]}$　力の向きと移動方向が同じ → ＋
B：$W_B = F \times x = 9.0 \times 0 = \underline{0[\mathrm{J}]}$　力の向きと移動方向が垂直 → 0(仕事しない)
C：$W_C = F \times x = -5.0 \times 2.0 = \underline{-10[\mathrm{J}]}$　力の向きと移動方向が反対 → －
D：$W_D = F \times x = 9.0 \times 0 = \underline{0[\mathrm{J}]}$　力の向きと移動方向が垂直 → 0(仕事しない)

例題 なめらかな床の上にある物体を図のように引っ張ると、2.0[s]かけて4.0[m]移動した。

(1) この物体を引く水平方向の力は何[N]か。
(2) この物体を引く力がした仕事は何[J]か。
(3) この操作の仕事率は何[W]か。



(1) 力を分解して

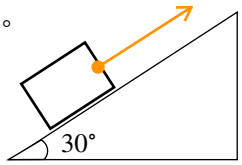


水平成分 $10 \times \cos 60° = \underline{5.0[\mathrm{N}]}$

(2) 仕事 ＝ 移動方向成分の力 × 移動距離 $= 5.0 \times 4.0 = \underline{20[\mathrm{J}]}$

(3) 仕事率 ＝ 仕事 ÷ 時間 $= 20 \div 2.0 = \underline{10[\mathrm{W}]}$

例題 水平面と30°の角をなす、なめらかな斜面に沿って質量20[kg]の物体をゆっくり引き上げる。重力加速度の大きさを9.8[m/s^2]として、次の問いに答えよう。



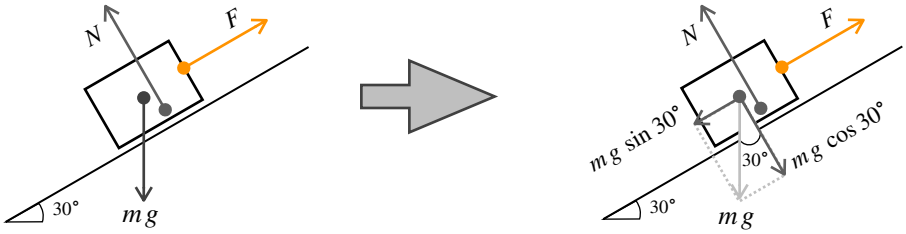
(1) 物体を引き上げるために必要な力は何[N]か。

(2) 斜面に沿って10[m]引き上げるのに必要な仕事は何[J]か。

(3) 斜面を利用せずに、この物体を**同じ高さ**まで引き上げるのに必要な仕事は何[J]か。

---

(1) まずは物体にはたらく力をすべて書く。



ゆっくり引き上げる ＝ 加速度 0！
→ 運動方程式 加速度0 ver.（or 力のつりあい）

斜面に水平な軸の方向で式を立てて

$$0 = F - mg\sin 30° \qquad \therefore F = mg\sin 30° = 20\times 9.8\times\frac{1}{2} = \underline{98[\mathrm{N}]}$$

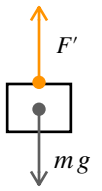
(2) (1)の力と、移動距離10[m]を用いて

$$W = F\times x = 98\times 10 = \underline{9.8\times 10^2[\mathrm{J}]}$$

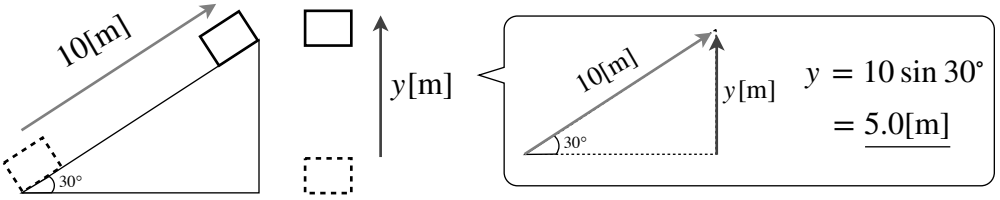
「垂直抗力N」「重力の分解した成分のmgcos30°」
→ 移動方向に垂直なので仕事には無関係！

(3) 斜面を用いずに物体を糸で真上に引っ張りあげるのに必要な力は、上下方向の力のつりあいを考えて

$$0 = F' - mg \qquad F' = mg = 20\times 9.8 = 196[\mathrm{N}]$$



また、斜面を用いずに(2)と同じ高さまで持ち上げるときの、地面からの高さを考えると



$$W' = F'\times x = 196\times 5.0 = \underline{9.8\times 10^2[\mathrm{J}]}$$

［補足］(2)と(3)のように、道具を使っても使わなくても、仕事量が同じになることを**「仕事の原理」**といいます。慣れてくると、(2)と(3)は計算しなくても答えが同じになることが分かってしまいます！
※ ただし、摩擦力などを考慮する場合は改めて考え直さなきゃいけないです。

2. エネルギー

POINT

◎ **運動エネルギー**
→ 移動方向は考えず、速さ（大きさのみ）を代入する！ $\boxed{\frac{1}{2}mv^2}$ m：質量　v：速さ

◎ **位置エネルギー**（重力による位置エネルギー）
→ 基準面は、問題に書かれていなければ**自分で設定** $\boxed{mgh}$ m：質量　g：重力加速度　h：基準面からの高さ

◎ **弾性エネルギー**（ばねによる位置エネルギー）
→ **自然長からの**伸び or 縮みを使うことに注意！ $\boxed{\frac{1}{2}kx^2}$ k：ばね定数　x：自然長からの伸び or 縮み

◎ **力学的エネルギー　＝　運動エネルギー　＋　位置エネルギー　＋　弾性エネルギー**

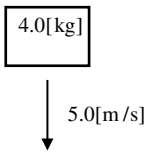
E[J]　　$\frac{1}{2}mv^2$　　mgh　　$\frac{1}{2}kx^2$

例題 次の物体の運動エネルギーを求めよう。

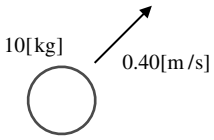
(1)



(2)



(3)



運動エネルギーは**運動の向きに関係なく**$\frac{1}{2}mv^2$に当てはめれば良い。

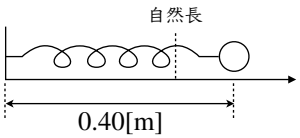
(1)
$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}\times 3.0\times 2.0^2$
$= \underline{6.0[\mathrm{J}]}$

(2)
$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}\times 4.0\times 5.0^2$
$= \underline{50[\mathrm{J}]}$

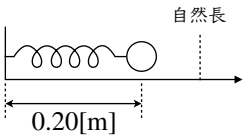
(3)
$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}\times 10\times 0.40^2$
$= \underline{0.80[\mathrm{J}]}$

例題 次の図における ① 物体に働く力[N] ② 弾性エネルギー(重力による位置エネルギー)[J] を求めよう。

(1) 自然長0.30[m]、ばね定数40[N/m]



(2) 自然長0.30[m]、ばね定数60[N/m]



x[m]には、**自然長からの伸び or 縮み**を入れることに注意。

(1) $x = 0.40 - 0.30 = 0.10[\mathrm{m}]$（伸び）　(2) $x = 0.30 - 0.20 = 0.10[\mathrm{m}]$（縮み）

① $F = kx = 40\times 0.10 = 4.0[\mathrm{N}]$
$\underline{\text{左向き(自然長に戻ろうとする向き)に}4.0[\mathrm{N}]}$

② $\frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}\times 40\times 0.10^2 = \underline{0.20[\mathrm{J}]}$

① $F = kx = 60\times 0.10 = 6.0[\mathrm{N}]$
$\underline{\text{右向き(自然長に戻ろうとする向き)に}6.0[\mathrm{N}]}$

② $\frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}\times 60\times 0.10^2 = \underline{0.30[\mathrm{J}]}$

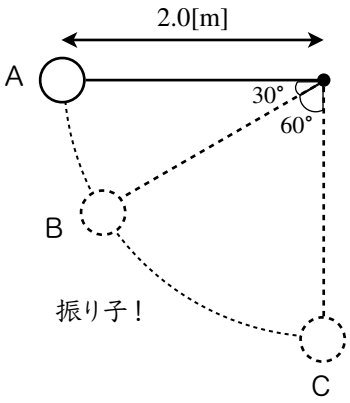
例題 次の物体の各点における位置エネルギーを求めよう。

物体の質量 … 0.50[kg]

重力加速度の大きさ … 9.8[m/s^2]

(1) 基準面を点Cとしたときの
点A、B、Cの位置エネルギー

(2) 基準面を点Bとしたときの
点A、B、Cの位置エネルギー

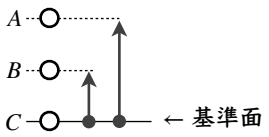


(1) 点Cを基準とすると、基準面からの高さは

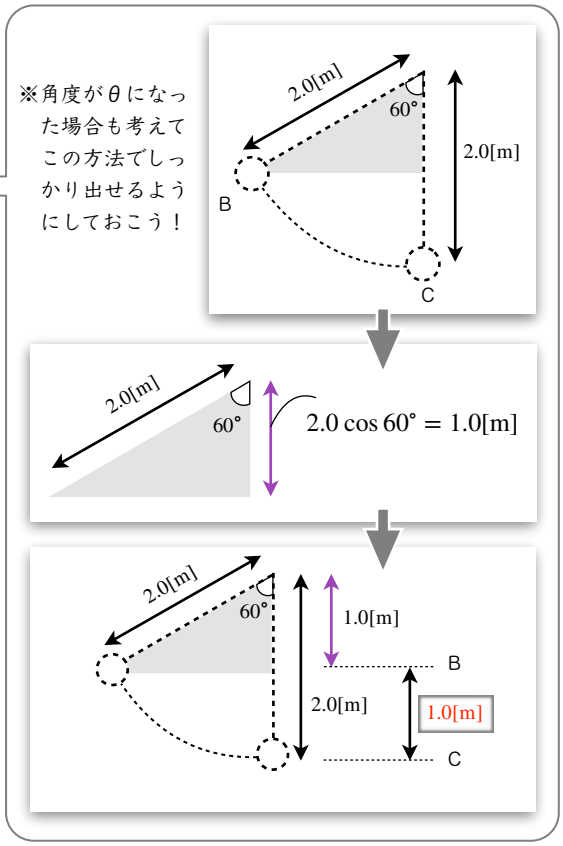
・C → 0[m] （基準は高さ0）

・A → 2.0[m]

・B → 1.0[m]



※角度がθになった場合も考えてこの方法でしっかり出せるようにしておこう！



A : $U_A = mgh_A = 0.50 \times 9.8 \times 2.0 = \underline{9.8[\mathrm{J}]}$

B : $U_B = mgh_B = 0.50 \times 9.8 \times 1.0 = \underline{4.9[\mathrm{J}]}$

C : $U_C = mgh_C = 0.50 \times 9.8 \times 0 = \underline{0[\mathrm{J}]}$

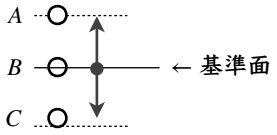
(2) 点Bを基準とすると、基準面からの高さは

・B → 0[m] （基準は高さ0）

・A → 1.0[m]

・C → −1.0[m]

※基準より低い位置にある場合は、高さをマイナスにする！！



A : $U_A = mgh_A = 0.50 \times 9.8 \times 1.0 = \underline{4.9[\mathrm{J}]}$

B : $U_B = mgh_B = 0.50 \times 9.8 \times 0 = \underline{0[\mathrm{J}]}$

C : $U_C = mgh_C = 0.50 \times 9.8 \times (-1.0) = \underline{-4.9[\mathrm{J}]}$

3. 仕事とエネルギーの関係

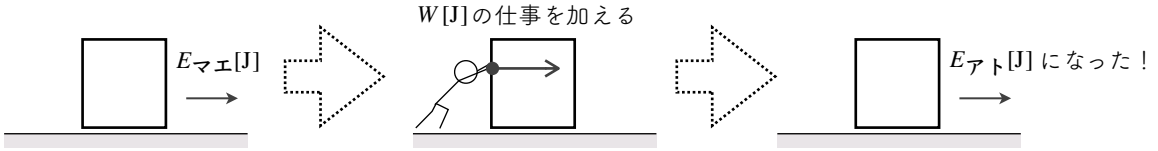
POINT

力学的エネルギー ＝ 運動エネルギー ＋ 位置エネルギー ＋ 弾性エネルギー

E[J] $\quad \frac{1}{2}mv^2 \quad mgh \quad \frac{1}{2}kx^2$

◎ **初めに持っていた力学的エネルギー ＋ 外部からの仕事 ＝ 最終的な力学的エネルギー**

$E_{マエ} \quad W \quad E_{アト}$



例題 なめらかな水平面上にある物体に、次のような仕事をする。次の問いに答えよう。

(1) 運動エネルギーが30[J]の物体に10[J]の仕事をする。物体の運動エネルギーは何[J]になるか。

(2) 静止している物体に28[J]の仕事をする。物体の運動エネルギーは何[J]になるか。

(3) 運動している物体に-40[J]の仕事をすると、物体は静止した。物体が初めに持っていた運動エネルギーは何[J]か。

(4) 速さ5.0[m/s]で進む2.0[kg]の物体に24[J]の仕事をすると、物体の速さは何[m/s]になるか。

(5) ある速さv[m/s]で進む0.15[kg]の物体に60[J]の仕事をすると、物体の速さは30[m/s]になった。物体の最初の速さv[m/s]を求めよう。

初めに持っていた力学的エネルギー ＋ 外部からの仕事 ＝ 最終的な力学的エネルギー

(1)

$$E_{マエ}+W=E_{アト}$$
$$30+10=E_{アト}$$
$$\therefore E_{アト}=\underline{40[\mathrm{J}]}$$

(2)

$$E_{マエ}+W=E_{アト}$$
$$0+28=E_{アト}$$
$$\therefore E_{アト}=\underline{28[\mathrm{J}]}$$

(3)

$$E_{マエ}+W=E_{アト}$$
$$E_{マエ}+(-40)=0$$
$$\therefore E_{マエ}=\underline{40[\mathrm{J}]}$$

(4)

$$E_{マエ}+W=E_{アト}$$
$$\frac{1}{2}mv_1^2+W=\frac{1}{2}mv_2^2$$
$$\frac{1}{2}\times 2.0\times 5.0^2+24=\frac{1}{2}\times 2.0\times v^2$$
$$\therefore v=\underline{7.0[\mathrm{m/s}]}$$

(5)

$$E_{マエ}+W=E_{アト}$$
$$\frac{1}{2}mv_1^2+W=\frac{1}{2}mv_2^2$$
$$\frac{1}{2}\times 0.15\times v^2+60=\frac{1}{2}\times 0.15\times 30^2$$
$$\therefore v=\underline{10[\mathrm{m/s}]}$$

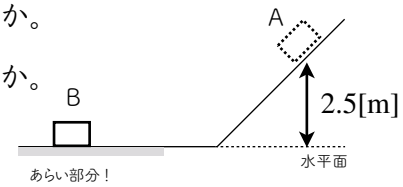
例題 なめらかな斜面上の高さ2.5[m]の点Aから質量2.0[kg]の物体を初速度0[m/s]ですべらせたところ、水平面上のあらい部分に侵入して停止した(点B)。重力加速度の大きさを$9.8[\mathrm{m/s^2}]$とし、水平面の高さを基準として次の問いに答えよう。。

(1) はじめの状態(図のA)の物体の力学的エネルギーは何[J]か。

(2) 最終的な状態(図のB)の物体の力学的エネルギーは何[J]か。

(3) 動摩擦力がした仕事は何[J]か。

(4) 動摩擦係数を0.50とすると、物体が水平面上のあらい部分を進んだ距離は何[m]か。



---

(1) 運動エネルギー … $\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}\times 2.0\times 0^2=0[\mathrm{J}]$

位置エネルギー … $mgh=2.0\times 9.8\times 2.5=49[\mathrm{J}]$

弾性エネルギー … ばねがそもそもないので $0[\mathrm{J}]$

} $0+49+0=\underline{49[\mathrm{J}]}$

(2) 運動エネルギー … $\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}\times 2.0\times 0^2=0[\mathrm{J}]$

位置エネルギー … $mgh=2.0\times 9.8\times 0=0[\mathrm{J}]$

弾性エネルギー … ばねがそもそもないので $0[\mathrm{J}]$

} $0+0+0=\underline{0[\mathbf{J}]}$

	運動エネルギー$-\frac{1}{2}mv^2$	位置エネルギー$-mgh$	弾性エネルギー$-\frac{1}{2}kx^2$
点A	0	$0.50\times 2.0\times 9.8(=49)$	0
点B	0	0	0

W

(3) 初めに持っていた力学的エネルギー ＋ 外部からの仕事 ＝ 最終的な力学的エネルギー

$E_{マエ}+W=E_{アト}$ → $49+W=0$ $\therefore W=\underline{-49[\mathrm{J}]}$

(4) 摩擦力は $\mu mg=0.50\times 2.0\times 9.8$

これに移動距離をかけると仕事が出せる。摩擦力がする仕事は、力の向きと移動方向が常に反対になることを考慮すると、**必ずマイナスになる。**

$W=-(\mu mg)\times x=-(0.50\times 2.0\times 9.8)\times x$ ※ この時点でマイナスをつけておく

これが(3)の答えに等しいので

$-(0.50\times 2.0\times 9.8)\times x=-49$ $\therefore x=\underline{5.0[\mathrm{m}]}$

摩擦力がする仕事は
必ず－（マイナス）になる！

6. 力学的エネルギーの保存

POINT

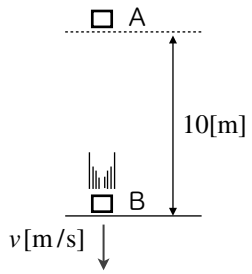
力学的エネルギー	＝	運動エネルギー	＋	位置エネルギー	＋	弾性エネルギー
E[J]		$\frac{1}{2}mv^2$		mgh		$\frac{1}{2}kx^2$

◎ 初めに持っていた力学的エネルギー ＋ ~~外部からの仕事~~ ＝ 最終的な力学的エネルギー

$E_{マエ}$ $E_{アト}$

外力がする仕事
（手で押す、摩擦 etc.）
がない場合、力学的エネルギーは保存される！

例題 質量2.0[kg]の物体を、高さ10[m]の点Aから自由落下させたところ、地面の点Bに速さv[m/s]で衝突した。重力加速度の大きさを9.8[m/s^2]として、v[m/s]を求めよう。



ばねはないので、弾性エネルギーは考えない。
位置エネルギー → 基準となる高さを設定！
（どこを基準にしてもOK、自分で決める）

地面を基準として、点Aと点Bの運動エネルギー及び位置エネルギーを考える。

	運動エネルギー$\frac{1}{2}mv^2$	位置エネルギーmgh
点A	0	$2.0\times9.8\times10$
点B	$\frac{1}{2}\times2.0\times v^2$	0

点Aから点Bに移動するまでに、手で力を加えたりせず、摩擦力もないので、力学的エネルギーは保存する。

$$\frac{1}{2}mv_A^2+mgh_A=\frac{1}{2}mv_B^2+mgh_B$$

$$0+2.0\times9.8\times10=\frac{1}{2}\times2.0\times v^2+0$$

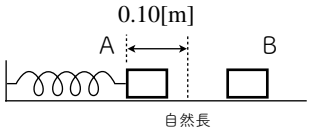
$$v^2=196 \qquad \therefore v=\underline{14[\mathrm{m/s}]}$$

例題 面はすべてなめらかで、重力加速度の大きさを$9.8[\mathrm{m/s^2}]$とする。次の問いに答えよう。

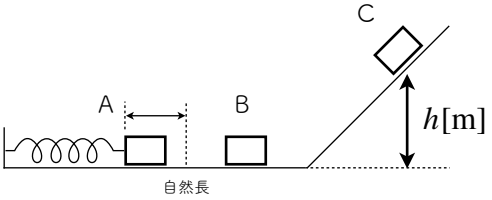
(1) 水平面上に置いた、ばね定数$1.2\times10^2[\mathrm{N/m}]$のばねに質量$0.30[\mathrm{kg}]$の物体を押し付けて自然の長さから$0.10[\mathrm{m}]$だけ縮めた位置で静かにはなした。ばねが自然の長さになった位置で物体はばねから離れた。ばねから離れた後の物体の速さ$v[\mathrm{m/s}]$を求めよう。

(2) (1)のあと、物体は斜面をすべり上がった。物体が最も地面から高くなるときの物体の高さhは何[m]か。

(1)



(2)



(1)と(2)は同時に表にまとめて考える。

基準面を水平な地面として、A〜Cのエネルギーを表にまとめると

	運動エネルギー$\frac{1}{2}mv^2$	位置エネルギーmgh	弾性エネルギー$\frac{1}{2}kx^2$
点A	0	0	$\frac{1}{2}\times(1.2\times10^2)\times0.10^2$
点B	$\frac{1}{2}\times0.30\times v^2$	0	0
点C	0	$0.30\times9.8\times h$	0

(1)点Aと点Bについて、力学的エネルギーは保存される。

$$\frac{1}{2}mv_A^2+mgh_A+\frac{1}{2}kx_A^2=\frac{1}{2}mv_B^2+mgh_B+\frac{1}{2}kx_B^2$$

$$0+0+\frac{1}{2}\times(1.2\times10^2)\times0.10^2=\frac{1}{2}\times0.30\times v^2+0+0$$

$$v^2=4.0 \qquad \therefore v=\underline{2.0[\mathrm{m/s}]}$$

(2)点Aと点Cについて、力学的エネルギーは保存される。

$$\frac{1}{2}mv_A^2+mgh_A+\frac{1}{2}kx_A^2=\frac{1}{2}mv_C^2+mgh_C+\frac{1}{2}kx_C^2$$

$$0+0+\frac{1}{2}\times(1.2\times10^2)\times0.10^2=0+0.30\times9.8\times h+0$$

$$\therefore h=\frac{1}{4.9}\approx\underline{0.20[\mathrm{m}]}$$